Zbiory mikroskopijne, nanoskopijne i pikoskopijne

Adam Kwela

Uniwersytet Gdański

20 czerwca 2015 r.

K. Czudek, A. Kwela, N. Mrożek, W. Wołoszyn, *Ideal-like properties of generalized microscopic sets*, Nikodem spisuje...

A. Kwela, *Additivity of the ideal of microscopic sets*, praca wysłana do czasopisma.

Niech $(f_n)_n$ będzie ciągiem rosnących funkcji $f_n\colon (0,1) \to (0,1)$ na tyle porządnych, żeby poniższa definicja miała sens (tzn. $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$ dla każdego n oraz istnieje $x_0 \in (0,1)$ taki, że dla każdego $0 < x < x_0$ ciąg $(f_n(x))_n$ jest nierosnący i $\sum_n f_n(x) < +\infty$).

Definicja (G. Horbaczewska)

Zbiór $M \subset \mathbb{R}$ nazywamy (f_n)-mikroskopijnym, jeśli dla każdego $\varepsilon \in (0,1)$ istnieje ciąg przedziałów $(I_k)_k$ taki, że $M \subset \bigcup_k I_k$ oraz $|I_k| \leqslant f_k(\varepsilon)$ dla każdego $k \in \omega$.

Przez $\mathcal{F}$ oznaczamy rodzinę wszystkich ciągów $(f_n)_n$ spełniających powyższe warunki.

Definicja

Zbiór $M \subset \mathbb{R}$ nazywamy mikroskopijnym, jeśli jest (x^n)-mikroskopijny.

Niech $(f_n)_n$ będzie ciągiem rosnących funkcji $f_n\colon (0,1) \to (0,1)$ na tyle porządnych, żeby poniższa definicja miała sens (tzn. $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$ dla każdego n oraz istnieje $x_0 \in (0,1)$ taki, że dla każdego $0 < x < x_0$ ciąg $(f_n(x))_n$ jest nierosnący i $\sum_n f_n(x) < +\infty$).

Definicja (G. Horbaczewska)

Zbiór $M \subset \mathbb{R}$ nazywamy (f_n)-mikroskopijnym, jeśli dla każdego $\varepsilon \in (0,1)$ istnieje ciąg przedziałów $(I_k)_k$ taki, że $M \subset \bigcup_k I_k$ oraz $|I_k| \leqslant f_k(\varepsilon)$ dla każdego $k \in \omega$.

Przez $\mathcal{F}$ oznaczamy rodzinę wszystkich ciągów $(f_n)_n$ spełniających powyższe warunki.

Definicja

Zbiór $M \subset \mathbb{R}$ nazywamy mikroskopijnym, jeśli jest (x^n)-mikroskopijny.

Niech $(f_n)_n$ będzie ciągiem rosnących funkcji $f_n\colon (0,1) \to (0,1)$ na tyle porządnych, żeby poniższa definicja miała sens (tzn. $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$ dla każdego n oraz istnieje $x_0 \in (0,1)$ taki, że dla każdego $0 < x < x_0$ ciąg $(f_n(x))_n$ jest nierosnący i $\sum_n f_n(x) < +\infty$).

Definicja (G. Horbaczewska)

Zbiór $M \subset \mathbb{R}$ nazywamy (f_n)-mikroskopijnym, jeśli dla każdego $\varepsilon \in (0,1)$ istnieje ciąg przedziałów $(I_k)_k$ taki, że $M \subset \bigcup_k I_k$ oraz $|I_k| \leqslant f_k(\varepsilon)$ dla każdego $k \in \omega$.

Przez $\mathcal{F}$ oznaczamy rodzinę wszystkich ciągów $(f_n)_n$ spełniających powyższe warunki.

Definicja

Zbiór $M \subset \mathbb{R}$ nazywamy mikroskopijnym, jeśli jest (x^n)-mikroskopijny.

Definicja

Zbiór $M \subset \mathbb{R}$ nazywamy nanoskopijnym, jeśli jest (x^{2^n})-mikroskopijny.

Pytanie (G. Horbaczewska, Niedzica, 2013)

Czy rodzina wszystkich zbiorów nanoskopijnych jest ideałem?

Twierdzenie

Nie!

Definicja

Zbiór $M \subset \mathbb{R}$ *nazywamy nanoskopijnym, jeśli jest* (x^{2^n})*-mikroskopijny.*

Pytanie (G. Horbaczewska, Niedzica, 2013)

Czy rodzina wszystkich zbiorów nanoskopijnych jest ideałem?

Twierdzenie

Nie!

Definicja

Zbiór $M \subset \mathbb{R}$ *nazywamy nanoskopijnym, jeśli jest* (x^{2^n})*-mikroskopijny.*

Pytanie (G. Horbaczewska, Niedzica, 2013)

Czy rodzina wszystkich zbiorów nanoskopijnych jest ideałem?

Twierdzenie

Nie!

Definicja

$M \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem silnie miary zero, jeśli dla każdego ciągu dodatnich liczb rzeczywistych $(\varepsilon_n)_n$ istnieje ciąg przedziałów $(I_k)_k$ taki, że $M \subset \bigcup_k I_k$ oraz $|I_k| \leqslant \varepsilon_k$ dla każdego $k \in \omega$.

Twierdzenie

Jeśli A jest zbiorem nanoskopijnym, a B jest zbiorem silnie miary zero, to $A \cup B$ jest zbiorem nanoskopijnym.

Stwierdzenie

Niech $(f_n)_n \in \mathcal{F}$ oraz X będzie zbiorem (f_n)-mikroskopijnym. Jeśli dla każdego $y \in \mathbb{R}$ suma $X \cup \{y\}$ jest zbiorem (f_n)-mikroskopijnym, to dla każdego zbioru silnie miary zero Y suma $X \cup Y$ jest zbiorem (f_n)-mikroskopijnym.

Definicja

$M \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem silnie miary zero, jeśli dla każdego ciągu dodatnich liczb rzeczywistych $(\varepsilon_n)_n$ istnieje ciąg przedziałów $(I_k)_k$ taki, że $M \subset \bigcup_k I_k$ oraz $|I_k| \leqslant \varepsilon_k$ dla każdego $k \in \omega$.

Twierdzenie

Jeśli A jest zbiorem nanoskopijnym, a B jest zbiorem silnie miary zero, to $A \cup B$ jest zbiorem nanoskopijnym.

Stwierdzenie

Niech $(f_n)_n \in \mathcal{F}$ oraz X będzie zbiorem (f_n)-mikroskopijnym. Jeśli dla każdego $y \in \mathbb{R}$ suma $X \cup \{y\}$ jest zbiorem (f_n)-mikroskopijnym, to dla każdego zbioru silnie miary zero Y suma $X \cup Y$ jest zbiorem (f_n)-mikroskopijnym.

Twierdzenie

Niech $(f_n)_n \in \mathcal{F}$ *oraz* X *będzie zbiorem* (f_n)*-mikroskopijnym spełniającym co najmniej jeden z następujących warunków:*

- X *można pokryć zbiorem* (f_n)*-mikroskopijnym typu* $\mathbf{F}_\sigma$*;*
- X *nie jest nigdziegęsty;*
- X *jest ograniczony.*

Wtedy dla każdego zbioru silnie miary zero Y *suma* $X \cup Y$ *jest zbiorem* (f_n)*-mikroskopijnym.*

Twierdzenie

Istnieją zbiór $(x^{n!})$*-mikroskopijny (tj. zbiór pikoskopijny)* X *oraz punkt* $x \in \mathbb{R}$ *takie, że* $X \cup \{x\}$ *nie jest zbiorem pikoskopijnym.*

Twierdzenie

Niech $(f_n)_n \in \mathcal{F}$ *oraz* X *będzie zbiorem* (f_n)*-mikroskopijnym spełniającym co najmniej jeden z następujących warunków:*

- X *można pokryć zbiorem* (f_n)*-mikroskopijnym typu* $\mathbf{F}_\sigma$*;*
- X *nie jest nigdziegęsty;*
- X *jest ograniczony.*

Wtedy dla każdego zbioru silnie miary zero Y *suma* $X \cup Y$ *jest zbiorem* (f_n)*-mikroskopijnym.*

Twierdzenie

Istnieją zbiór $(x^{n!})$*-mikroskopijny (tj. zbiór pikoskopijny)* X *oraz punkt* $x \in \mathbb{R}$ *takie, że* $X \cup \{x\}$ *nie jest zbiorem pikoskopijnym.*

Definicja

Zbiór nazywamy $\mathbf{F}_\sigma$-(f_n)-*mikroskopijnym, jeśli można go pokryć zbiorem* (f_n)-*mikroskopijnym typu* $\mathbf{F}_\sigma$.

Twierdzenie

Niech $(f_n)_n \in \mathcal{F}$. *Rodzina wszystkich zbiorów* $\mathbf{F}_\sigma$-(f_n)-*mikroskopijnych jest* σ-*ideałem.*

$$\mathtt{add}\,(\mathcal{I}) = \min\{\mathrm{card}(\mathcal{A}) : \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{I} \quad \wedge \quad \bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}\}$$

Pytanie (G. Horbaczewska, Stara Lesna, 2010)

Ile wynosi addytywność ideału zbiorów mikroskopijnych?

Definicja

Zbiór $M \subset \mathbb{R}$ należy do $\mathcal{M}'$ jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją zbiór $D \subset \omega$ asymptotycznej gęstości zero oraz ciąg przedziałów $(J_n)_{n \in D}$ takie, że $M \subset \bigcup_{n \in D} J_n$ oraz $|J_n| \leqslant \varepsilon^{n+1}$ dla każdego $n \in D$.

Stwierdzenie

Załóżmy aksjomat Martina. Wtedy $\mathtt{add}\,(\mathcal{M}') = 2^\omega$ oraz $\mathtt{add}\,(\mathcal{M}_{\ln}) = 2^\omega$, gdzie $\mathcal{M}_{\ln}$ jest rodziną wszystkich zbiorów $(x^{\ln(n+1)})$-mikroskopijnych.

$\mathtt{add}\,(\mathcal{I}) = \min\{\mathrm{card}(\mathcal{A}): \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{I} \quad \wedge \quad \bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}\}$

Pytanie (G. Horbaczewska, Stara Lesna, 2010)

Ile wynosi addytywność ideału zbiorów mikroskopijnych?

Definicja

Zbiór $M \subset \mathbb{R}$ należy do $\mathcal{M}'$ jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją zbiór $D \subset \omega$ asymptotycznej gęstości zero oraz ciąg przedziałów $(J_n)_{n \in D}$ takie, że $M \subset \bigcup_{n \in D} J_n$ oraz $|J_n| \leqslant \varepsilon^{n+1}$ dla każdego $n \in D$.

Stwierdzenie

Załóżmy aksjomat Martina. Wtedy $\mathtt{add}\,(\mathcal{M}') = 2^\omega$ oraz $\mathtt{add}\,(\mathcal{M}_{\ln}) = 2^\omega$, gdzie $\mathcal{M}_{\ln}$ jest rodziną wszystkich zbiorów $(x^{\ln(n+1)})$-mikroskopijnych.

$$\mathsf{add}\,(\mathcal{I}) = \min\{\mathrm{card}(\mathcal{A}) : \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{I} \quad \wedge \quad \bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}\}$$

Pytanie (G. Horbaczewska, Stara Lesna, 2010)

Ile wynosi addytywność ideału zbiorów mikroskopijnych?

Definicja

Zbiór $M \subset \mathbb{R}$ należy do $\mathcal{M}'$ jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją zbiór $D \subset \omega$ asymptotycznej gęstości zero oraz ciąg przedziałów $(J_n)_{n \in D}$ takie, że $M \subset \bigcup_{n \in D} J_n$ oraz $|J_n| \leqslant \varepsilon^{n+1}$ dla każdego $n \in D$.

Stwierdzenie

Załóżmy aksjomat Martina. Wtedy $\mathtt{add}\,(\mathcal{M}') = 2^\omega$ oraz $\mathtt{add}\,(\mathcal{M}_{\ln}) = 2^\omega$, gdzie $\mathcal{M}_{\ln}$ jest rodziną wszystkich zbiorów $(x^{\ln(n+1)})$-mikroskopijnych.

Twierdzenie

Istnieje zbiór mikroskopijny, który nie należy do $\mathcal{M}'$.

Twierdzenie

Addytywność ideału zbiorów mikroskopijnych jest równa ω_1.

Kilka słów o dowodzie...

Twierdzenie

Istnieje zbiór mikroskopijny, który nie należy do $\mathcal{M}'$.

Twierdzenie

Addytywność ideału zbiorów mikroskopijnych jest równa ω_1.

Kilka słów o dowodzie...

Twierdzenie

Istnieje zbiór mikroskopijny, który nie należy do $\mathcal{M}'$.

Twierdzenie

Addytywność ideału zbiorów mikroskopijnych jest równa ω_1.

Kilka słów o dowodzie...

Dziękuję za uwagę!